Першаков Никита БФ3243. Вариант 62.

№4.

Имеем выборку $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

Распределение Парето: $p(x|\alpha) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $x \geq 1$

Т.к. выборка независимая, мы можем перемножить:

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \prod_{i=1}^{n} \alpha \cdot (x_i^{\alpha+1})^{-1} =$$

$$= \frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}};$$

введём: $l(\alpha) = \ln(L(\alpha)) = \ln\left(\frac{\alpha^n}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha+1}}\right) = \ln\alpha^n - \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\alpha+1}\right) =$

$$= n\ln\alpha - (\alpha+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right);$$

производная:

$$l'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$$

$$\frac{n}{\alpha} = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\frac{n}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}.$$

Проверка, что это максимум:

$l''(\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} < 0$ — значит это максимум.

№2.

$$\langle Z_1^4 \rangle = 12 = \mathbb{E}(Z_1^4);$$

$$\langle Z_2^6 \rangle = 15 = \mathbb{E}(Z_2^6)$$

$$\langle Z_1^2 Z_2^4 \rangle = 10 = \mathbb{E}(Z_1^2 Z_2^4)$$

$$\mathbb{E}[Z^{2k}] = (2k-1)!!\,\sigma^{2k}$$

$$\mathbb{E}(Z_1^4) = (3)!!\,\sigma_{z_1}^4 = 3\sigma_{z_1}^4 = 12 \Rightarrow \sigma_{z_1}^2 = 2;$$

$$\mathbb{E}(z_2^6) = (5)!!\,\sigma_{z_2}^6 = 15\,\sigma_{z_2}^6 = 15$$

$$\sigma_{z_2}^6 = 1$$

$$\sigma_{z_2}^2 = 1.$$

$$\operatorname{cov}(z_1, z_1) = \sigma_{z_1}^2$$

$$\operatorname{cov}(z_2, z_2) = \sigma_{z_2}^2$$

$$\operatorname{cov}(z_1, z_2) = r\,\sigma_{z_1}\sigma_{z_2}$$

нужно посчитать $\mathbb{E}[z_1^2 z_2^4]$, тут 6 множителей.

возможно:

N1.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

$Z = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$

$V = Y\cos\varphi - X\sin\varphi$ — некоррелированны.

Найти: φ, $Var(Z)$, $Var(V)$

Нужно найти коэффициент корреляции и приравнять к нулю.

$Var(X) = 4$

$\mathbb{E}[X^2] - (E[X])^2 = 4.$

N3.

z_1, z_2, z_3

$p(z_1) = Az_1$

$p(z_2) = Az_2$

$p(z_3) = Az_3$

Требуем:

$$C \cdot \iiint p(z_1)\,p(z_2)\,p(z_3)\,dz_1 dz_2 dz_3 = 1$$

$$C \cdot \int_0^2 p(z_1)\,dz_1 \int_0^2 p(z_2)\,dz_2 \int_0^2 p(z_3)\,dz_3 = 1$$

$$C \cdot 8 = 1$$

$$C = \frac{1}{8}$$

???