Вертоузова Эвелина 2.241
Вариант 56

№1

(X, Y) – случ. вектор.

$\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$Z = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$; $V = Y\cos\varphi - X\sin\varphi$

$\operatorname{cov}(Z; V) = \operatorname{cov}(X\cos\varphi + Y\sin\varphi; \cancel{Y}\cos\varphi - X\sin\varphi)$
$= 0$

т. е

$E\left[(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\cdot(Y\cos\varphi - X\sin\varphi)\right] - E(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)\cdot$
$\cdot E(Y\cos\varphi - X\sin\varphi) = 0$

Расчитем 1-е слагаемое

$E\left[(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)(Y\cos\varphi - X\sin\varphi)\right] =$

$= E\left[XY\cos^2\varphi + Y^2\sin\varphi\cos\varphi - X^2\sin\varphi\cos\varphi - XY\sin^2\varphi\right]$

$= \sin\varphi\cos\varphi\, E\left[Y^2 - X^2\right] + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, E(XY)$

Второе

$\left[E(X\cos\varphi) + E(Y\sin\varphi)\right]\cdot\left[E(Y\cos\varphi) - E[X\sin\varphi]\right] =$

$= \cos^2\varphi\, EX\cdot EY + [EX]^2\cdot(-\sin\varphi\cdot\cos\varphi) + \sin\varphi\cos\varphi\cdot$
$\cdot(EY)^2 - \sin^2\varphi\, E[X]\, E(Y) =$

$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, EX\, EY + \sin\varphi\cos\varphi\left[-(EX)^2 + (EY)^2\right]$

Запишем вместе

$\left[\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right]\left[E(XY) + EX\,EY\right] + \sin\varphi\cos\varphi\left[(EY)^2 + E(Y^2) -\right.$
$\left. - (EX)^2 + E(X^2)\right] =$

$$\cos 2\varphi \cdot \sigma_{xy} + \frac{\sin 2\varphi}{2}\left[\sigma_y^2 - \sigma_x^2\right] =$$

$$= \cos 2\varphi + 6 \sin 2\varphi = 0$$

$$\cancel{\text{arctg}} \quad \text{tg}\, 2\varphi = -\frac{1}{6}$$

$$2\varphi = \pi\text{-arctg}\left(+\frac{1}{6}\right) + \pi n$$

$$\varphi = \cancel{\varphi} \frac{\pi}{2}\text{arctg}\left(+\frac{1}{6}\right) + \frac{\pi n}{2}$$

№ 2

$$p(x|\alpha) = \alpha x^{-\alpha-1}, \quad x \geq 1$$

$$L = \prod_1^m \alpha x_m^{-\alpha-1} = \alpha^m \left(\prod x_m\right)^{-\alpha-1}$$

$$\ln L = m \ln \alpha - (\alpha+1) \ln \prod (x_m)$$

$$(\ln L)' = \frac{m}{\alpha} - \ln \prod x_m = 0$$

$$\alpha = \frac{m}{\ln \prod x_m}$$

$(\ln L)'' = -\frac{m}{\alpha^2} < 0 \Rightarrow$ действительно максимум.

№ 3

$Z_1; Z_2; Z_3$ — i.i.d

$$p(z) = Az, \quad 0 \leq z \leq 2$$

$$\int_0^2 Az\, dz = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2} = \frac{1}{2}$$

~~напишем плотность вероятности.~~

$$\cancel{P_{(r,s,k)}(z_1; z_2; z_3)\; n(n-1)(n-2)\, C_{n-2}^{r-1}\left[F(z_1)\right]^{r-1} C^{s-r-1}}$$

знаем

$$\frac{p(x_2|\theta)\cdot p(\theta|x_1)}{\int p(x_2|\theta')p(\theta'|x_1)d\theta'}$$

у нас $p(z)=\frac{1}{2}z$

$$p(\theta|x_1)=\frac{p(x|\theta)p(\theta)}{\int p(x_1|\theta')p(\theta)d\theta'}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}z\cdot p(\theta)}{\int_0}$$

№2

$\bar{Z}=(Z_1;Z_2)$

$Z\approx\text{Normal}(\mu=0;\sigma_x;\sigma_y)$

$\langle Z_1^4\rangle=12 \qquad \langle Z_1^2 Z_2^4\rangle=10$

$\langle Z_2^6\rangle=15;$

$12\langle Z_1^2\rangle=12 \Rightarrow$