Вариант №54 Василий Гончаров

Задача 2

$\vec{Z} = (Z_1, Z_2)$ $E(Z_1)=E(Z_2)=0$ $E(Z_1^4) = 12$ $E(Z_2^6) = 15$ $(Z_1^2 Z_2^4) = 10$

$E(Z_1^4) = 3\sigma_{Z_1}^4 = 12$; $\sigma_{Z_1}^2 = 2$

$E(Z_2^6) = 15\sigma_{Z_2}^6 = 15$; $\sigma_{Z_2}^2 = 1$

$Z_1 Z_1 Z_2 Z_2 Z_2 Z_2$ ① $2Z_1Z_2 + 2Z_2Z_2$ ② $Z_1Z_1 + 2Z_2Z_2$ — возможные пара-образования

① Для двух Z_1 есть 4 Z_2 в пару, нужно выбрать две Z_2: $4\cdot(4-1) = 12$ образом

② Пара Z_1 возможно ед-ым, а для первой пары Z_2 возможны 3 случая, после чего следущая пара тоже единств-но определена

Итого: $E(Z_1^2 Z_2^4) = 3E(Z_1^2)E(Z_2^2)^2 + 12E(Z_2^2)E(Z_1Z_2)^2 =$

$= 3\sigma_1^2\sigma_2^4 + 12\sigma_2^2\cdot c^2 \overset{\text{по условию}}{=} 10$; $3\cdot 2\cdot 1 + 12\cdot 1\cdot c^2 = 10$; $12c^2 = 4$; $c^2 = \frac{1}{3}$

$c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \end{pmatrix}$

Задача 3

$\int_0^2 p(z)dz = \int_0^2 Az\,dz = A\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 = 2A = 1$; $A = \frac{1}{2}$

$f(z) = \frac{z}{2}$ $F(z) = \int_0^z \frac{z}{2}dz = \frac{z^2}{4}$ $(0 \le z \le 2)$

Пусть $U = \max(Z_1, Z_2, Z_3)$, тогда

$F_U(u) = P(U \le u) = F(u)^3 = \left(\frac{u^2}{4}\right)^3 = \frac{u^6}{64}$

$F'_U(u) = \frac{6u^5}{64} = \frac{3}{32}u^5$

$E(U) = \int_0^2 u F'_U(u) = \frac{3}{32}\int_0^2 u^6 du = \frac{3}{32}\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^2 du = \frac{3}{32}\cdot\frac{32\cdot 4}{7} = \frac{12}{7}$

$EU^2 = \int_0^2 u^2 F'_U(u)du = \frac{3}{32}\int_0^2 u^7 du = \frac{3}{32}\left[\frac{u^8}{8}\right]_0^2 = \frac{3}{32}\cdot\frac{32\cdot 8}{8} = 3$

$D(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 3 - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{49\cdot 3 - 144}{49} = \frac{3(49-48)}{49} = \frac{3}{49}$

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{12}{7}$; $\frac{3}{49}$

Задача 4

$p(x|a) = \frac{a}{x^{a+1}}$, при $x \ge 1$ $a_{ммп}$ — ?

$L(a) = \prod_{i=1}^n p(x_i|a) = \prod_{i=1}^n \frac{a}{x_i^{a+1}} = a^n e^{-(a+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

$l(a) = \ln\left[a^n e^{-(a+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i}\right] = n\ln a - (a+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$

$\frac{d(l(a))}{da} = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^n \ln x_i \overset{\text{приравняем}}{=} 0$; $\frac{d^2(l(a))}{da^2} = -\frac{n}{a^2}$ $\left(-\frac{n}{a^2} < 0\right.$ выпуклость вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это максимум найденный экстремум$\left.\right)$

Ответ: $a_{ммп} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$

Задача 1 $\quad Cov(X,Y) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Cov(Z,V) = 0$

$Z = X\cos\varphi + Y\sin\varphi$
$V = Y\cos\varphi - X\sin\varphi$ $\rightarrow$ вроде это результат применения матрицы поворота.

$$\begin{pmatrix} Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$Cov(Z,V) = (\cos\varphi \;\; \sin\varphi)\cdot\hat{C}\cdot\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = (\cos\varphi \;\; \sin\varphi)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= (\cos\varphi \;\; \sin\varphi)\begin{pmatrix} -4\sin\varphi + \cos\varphi \\ -\sin\varphi + 2\cos\varphi \end{pmatrix} = -4\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi - \sin 2\varphi \overset{\text{по условию}}{=} 0$$

$\sin 2\varphi = \cos 2\varphi; \quad \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = 1; \quad tg\, 2\varphi = 1.$

$\cancel{2\varphi}\cdot \; 2\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

$\cancel{\varphi 2} \; \boxed{\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbb{Z}}$