вариант №53 Померко Мария группа 3

№2

$\langle X^6\rangle = \frac{5}{9}$, $\langle Y^4\rangle = \langle X^2 Y^4\rangle = 3$

$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X] = 0$

Для гауссовой сл. вел с нул ср. моменты четного порядка выр-ся через дисперсию:

$\mathbb{E}[X^{2k}] = (\sigma_x^2)^k \cdot (2k-1)!!$

для X^6 : $k=3$

$\frac{5}{9} = (\sigma_x^2)^3 \cdot (2\cdot 3 - 1)!! = (\sigma_x^2)^3 \cdot 5!! = (\sigma_x^2)^3 \cdot 15$

$(\sigma_x^2)^3 = \frac{5}{9\cdot 15} = \frac{1}{9\cdot 3} = \frac{1}{27}$

$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{1}{3}}$

для Y^4 : $k = 2$

$3 = (\sigma_y^2)^2 \cdot (4-1)!! = (\sigma_y^2)^2 \cdot 3!! = 3(\sigma_y^2)^2$

$\sigma_y^2 = \frac{3}{3} = 1$

$\boxed{\sigma_y^2 = 1}$ $\rho = \frac{\langle XY\rangle}{\sigma_x \sigma_y}$

Пусть $a = \langle X^2\rangle = \frac{1}{3}$, $b = \langle Y^2\rangle = 1$, $c = \langle X\cdot Y\rangle$

$\Rightarrow c = \rho\sqrt{ab} = \rho\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\rho}{\sqrt{3}}$

$\langle X^2 Y^4\rangle = \langle XXYYYY\rangle \Rightarrow$ всего 3 пары

пара XX даёт a, YY - даёт b, XY дает c.

Посчитаем по числу пар XY:

1) Нет пар XY: 1 способ выбрать XX.
4 Y разбить на пары: $(4-1)!! = 3$ способа

$\Rightarrow 1\cdot 3 = 3$ способа , вклад одного разбиения: $a\, b^2$

2) одна пара XY: нет способов

3) две пары XY: выбрать 2 из 4 Y : $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2} = 6$ способов

разбить 2Y на пары: 1 способ, спарить 2X с 2Y = 2

$\Rightarrow$ $1\cdot 6\cdot 2 = 12$ способов , вклад одного разбиения $c^2 b$

$$\langle X^2 Y^4 \rangle = 3 a \frac{a}{b^2} + 12 c^2 b$$

$$3 = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + 12 c^2$$

$$3 = 1 + 12 c^2$$

$$12 c^2 = 3 - 1 = 2$$

$$c^2 = \frac{2}{12}$$

$$c^2 = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\rho^2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\rho^2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \rho = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

№ 4

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – выборка из Гамма-распределения с парам-ми λ и k:

$p(x|\lambda) = \lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x} / \Gamma(k)$ при $x \geq 0$. k – известное

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^k x_i^{k-1} e^{-\lambda x_i}}{\Gamma(k)} = \frac{\lambda^{kn}}{(\Gamma(k))^n} \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{k-1}$$

$$\cancel{l(\lambda) = \ln L(\lambda)}$$

$$l(\lambda) = \ln L(\lambda) = nk \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + const$$

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{nk}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

продолжение на следующ. страниц.

Вариант 53 Померко Мария гр3.

№4 (продолжение)

$$\Rightarrow \frac{nk}{a} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\Rightarrow a_{мп} = \frac{nk}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } a_{мп} = \frac{nk}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$$

вариант 53

Померко Мария гр. 3.

№3

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 незав и равн распр на $[0,6]$.

$f_Y(y) = \frac{1}{6}$ $\quad F_Y(y) = \frac{y}{6}$, для $0 \le y \le 6$

Для k-ой порядковой статистики:

$$f_{Y_{(k)}}(y) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left[F_Y(y)\right]^{k-1}\left[1-F_Y(y)\right]^{n-k} f_Y(y)$$

Для $n=4$, $k=3$:

$$f_{Y_{(3)}}(y) = \frac{4!}{2!\,1!}\left(\frac{y}{6}\right)^2\left(1-\frac{y}{6}\right)^1 \cdot \frac{1}{6} = 12 \cdot \frac{y^2}{36} \cdot \frac{6-y}{6} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 12 \cdot \frac{y^2}{36} \cdot \frac{6-y}{36} = \boxed{\frac{y^2(6-y)}{108}}$$

$(1 < [Y_{(3)} - 3]^2 < 9) \Rightarrow 1 < (y-3)^2 < 9$

$(y-3)^2 > 1 \Rightarrow |y-3| > 1 \Rightarrow y < 2$ или $y > 4$

$(y-3)^2 < 9 \Rightarrow |y-3| < 3 \Rightarrow 0 < y < 6$

$\Rightarrow$ нужная область: $(y<2) \vee (y>4)$ при $0 \le y \le 6$

$\Rightarrow 0 \le y < 2$ или $4 < y \le 6$

$$\Rightarrow P = \int_0^2 f_{Y_{(3)}}(y)\,dy + \int_4^6 f_{Y_{(3)}}(y)\,dy \;=$$

Пусть $I = \int_a^b \frac{y^2(6-y)}{108}\,dy = \frac{1}{108}\left[2y^3 - \frac{y^4}{4}\right]_a^b$

$$= \frac{1}{108}\left[2\cdot 2^3 - \frac{2^4}{4} - 0 + 2\cdot 6^3 - \frac{6^4}{4} - 2\cdot 4^3 + \frac{4^4}{4}\right] = \boxed{\frac{14}{27}}$$

Ответ: $f_{Y_{(3)}}(y) = \frac{y^2(6-y)}{108}$, $\quad P(1 < [Y_{(3)} - 3]^2 < 9) = \frac{14}{27}$

№ 1

$\hat{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ для (X, Y)

$X' = X + 2$

X', Y' – некоррелир.

$Y' = Y + Z$

$\mathcal{D}(X') - ?$

$\mathcal{D}(Y') - ?$

$\mathcal{D}(Z') - ?$

$\hat{C} = \begin{pmatrix} var(x) & cov(x, y) \\ cov(y, x) & var(y) \end{pmatrix}$

$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

$cov(X, Y) = \mathbb{E}[X, Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$