Вар. 48 Сухарников Влад БФЗ-24-1

№2

$\vec{z} = (z_1, z_2) \sim N(0, \hat{C})$

$\langle z_1^4 \rangle = 12$, $\langle z_2^6 \rangle = 15$

$\langle z_1^2 z_2^4 \rangle = 10$

$\hat{C}$ - ?

$\begin{cases} a = \langle z_1^2 \rangle = \sigma_1^2 \\ b = \langle z_2^2 \rangle = \sigma_2^2 \\ c = \langle z_1 z_2 \rangle \end{cases}$

$\hat{C} := \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 & \langle xy \rangle - \langle x \rangle\langle y \rangle \\ \langle xy \rangle - \langle x \rangle\langle y \rangle & \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = z_1 \\ y = z_2 \end{matrix}$

Для $\langle z_1^4 \rangle$: $(4-1)!! = 3$

$\langle z_1^4 \rangle = 3\langle z_1^2 \rangle^2 = 3a^2 = 12 \Rightarrow a = 2 = \sigma_1^2$

Для $\langle z_2^6 \rangle = (6-1)!! = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle z_2^6 \rangle = 15 b^3 = 15 \Rightarrow b = 1$

Для $\langle z_1^2 z_2^4 \rangle$:

Всего 3 пары: $\langle z_1^2 \rangle = a$; $\langle z_2^2 \rangle = b$; $\langle z_1 z_2 \rangle = c$

$\exists k$ - кол-во пар $\langle z_1 z_2 \rangle \Rightarrow$ $2-k$ - пер-ых „z_1“, $4-k$ - пер-ых „z_2“

При этом k - чет., чтобы суммарная степень могла давать пары $\Rightarrow \begin{cases} k = 0 & (1) \\ k = 2 & (2) \end{cases}$ | (1): $k = 0 \Rightarrow$ 2 „z_1“ и 4 „z_2“

~~z_1 для z_2: 2, z_2 для z_1: 4 - 1 спо-~~

соб соедин. 2 „z_1“ ($\langle z_1^2 \rangle$), и ост. 4 „z_2“ $\Rightarrow$ 3 способа соедин. 4 „z_2“ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ способа. Каждый дает $a b^2 \Rightarrow 3ab^2$

(2): $k = 2 \Rightarrow 2 \langle z_1 z_2 \rangle$ пары $\Rightarrow$ 0 „z_1“ и 2 „z_2“ $\Rightarrow$ 1 „$\langle z_2^2 \rangle$“

Выбрать 2 „z_2“ из 4: $\frac{4!}{2 \cdot 2} = 6$ способов

2 „z_1“ и 2 „z_2“: 2 способа $\Rightarrow 1 \cdot 6 \cdot 2 = 12$; каждый $c^2 \cdot b \Rightarrow 12bc^2$

Тогда по т. Вика: $\langle z_1^2 z_2^4 \rangle = 3ab^2 + 12bc^2 = 10$

~~$c^2 = \frac{5}{6} - 4$~~ $\Rightarrow$ ~~$6(2 + 2c^2) = 10$; $6(1 + c^2) = 5$, $c^2 = \frac{5}{6} - 1$~~

$3(2 + 4c^2) = 10$

$3(1 + 2c^2) = 5$; $c^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}$

$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

№4

$(x_1, \ldots, x_n)$ - i.i.d.; $p(x|a) = \frac{a}{x^{a+1}}$, $x \geq 1$

a - ?

$L(a) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a}{x_i^{a+1}} =$ ~~$\frac{a^n}{x^{n(a+1)}}$~~

~~$\ln L(a) = n\ln a - n(a+1)\ln x$~~

$= \frac{a^n}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a+1}}$; $\ln L(a) = n\ln a - (a+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\frac{d\ln L(a)}{da} = \frac{n}{a} - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)}{n}$

$\frac{d^2 \ln L(a)}{da} = -\frac{n}{a^2} < 0 \Rightarrow \max$

N1

(X,Y); $\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} \sigma_z^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_{z\theta} = 0$ $\begin{cases} z = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ V = y\cos\varphi - x\sin\varphi \end{cases}$

$\varphi - ?$; $\sigma_z, \sigma_\theta - ?$

$\sigma_z^2 = \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2$

$z^2 = x^2\cos^2\varphi + xy\sin 2\varphi + y^2\sin^2\varphi = xy\sin 2\varphi + x^2 + \sin^2\varphi(y^2 - x^2)$

$\langle z^2 \rangle = \sin 2\varphi \langle XY \rangle + \langle X^2 \rangle + \sin^2\varphi(\langle Y^2 \rangle - \langle X^2 \rangle) =$

$= \sin 2\varphi \langle XY \rangle + 4 - \langle X \rangle^2 + \sin^2\varphi(-\langle Y \rangle^2 - 2 + \langle X \rangle^2)$

$\langle z \rangle = \langle X \rangle \cos\varphi + \langle Y \rangle \sin\varphi$

$\sigma_z^2 = \sin 2\varphi \langle XY \rangle + \langle X^2 \rangle + \sin^2\varphi(\langle Y^2 \rangle - \langle X^2 \rangle) - \langle X \rangle^2\cos^2\varphi -$

$- \frac{\langle X \rangle \langle Y \rangle}{2}\sin 2\varphi -$

N3

ξ_1, ξ_2, ξ_3 - НЗ

$p(z) = Az$, $0 \le z \le 2$

$A - ?$ $\mu, \sigma - ?$

$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 1$; $\int_0^2 Az\,dz = 1$; $A\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 = 1$

$2A = 1 \Rightarrow \underline{\underline{A = \frac{1}{2}}}$

~~$P(\max\{\xi_i\}_1^3) = F$~~

$p(z) = n\binom{n-1}{k-1}F(z)^{k-1}(1-F(z))^{n-k} = \frac{z}{2}$, $n = 3 = \frac{z}{2}$

$\frac{z}{2} = 3\binom{2}{k-1}F(z)^{k-1}(1-F(z))$; $p(z) = F'(z) = \cancel{\frac{z^2}{4}} \Rightarrow F(z) = 1$