Воронина Анастасия, группа 3.
Вариант 44.

№2.

$Z=(Z_1,Z_2)$, $\langle Z_1\rangle=0$, $\langle Z_2\rangle=0$; $\langle Z_1^4\rangle=12$, $\langle Z_2^6\rangle=15$, $\langle Z_1^2Z_2^4\rangle=10$.

пусть $Z\sim N(0,\sigma^2)$, $X=\sigma Z \Rightarrow Z\sim N(0,1) \Rightarrow X^4=Z^4\sigma^4$, $X^6=Z^6\sigma^6$

$\langle X^4\rangle=(2\cdot2-1)!!=3$; $\langle X^6\rangle=(2\cdot3-1)!!=5!!=15$

$3\sigma_{Z_1}^4=12 \Rightarrow \sigma_{Z_1}^4=4$, $\sigma_{Z_1}^2=2$; $15\sigma_{Z_2}^6=15\Rightarrow \sigma_{Z_2}^6=1\Rightarrow\sigma_{Z_2}^2=1$

пусть $a=\langle Z_1Z_1\rangle = E[Z_1^2]=\sigma_{Z_1}^2=2$; $b=\langle Z_2Z_2\rangle=E[Z_2^2]=\sigma_{Z_2}^2=1$

$c=\langle Z_1Z_2\rangle=\mathrm{cov}(Z_1,Z_2)$ ;

6 множителей: $Z_1Z_1Z_2Z_2Z_2Z_2$; разбиение на пары: 1) 0 пар $Z_1Z_2$, 1 пара $Z_1Z_1$, 2 пары $Z_2Z_2$
2) 2 пары $Z_1Z_2$, 1 пара $Z_2Z_2$.

1) 0 пар $Z_1Z_2$, 1 $Z_1Z_1$, 2 $Z_2Z_2$: $ab^2$; единственный способ разбиения на пару $Z_1Z_1$, на пары $Z_2Z_2$ – 3 способа, тогда вклад $=ab^2\cdot1\cdot3=3ab^2$

2) 2 пары $Z_1Z_2$, 1 пара $Z_2Z_2$: $bc^2$

$Z_1Z_1Z_2Z_2Z_2Z_2$ единственным способом вклад: $bc^2\cdot1\cdot4\cdot3=12bc^2$

пара для $Z_1$ – 4 способа
пара для $Z_1$ – осталось 3 $Z_2\Rightarrow$ 3 способа

Тогда всего $3ab^2+12bc^2=\langle Z_1^2Z_2^4\rangle=10$: $3ab^2+12bc^2=10$, $a=2$, $b=1$

$6+12c^2=10$; $12c^2=4$; $c^2=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\pm\frac{1}{\sqrt3}$

$A(\mathrm{cov}(X,Y))=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \mathrm{cov}(X,Y)\\ \mathrm{cov}(X,Y) & \sigma_Y^2\end{pmatrix}$; $\hat A=\begin{pmatrix}\sigma_{Z_1}^2 & \mathrm{cov}(Z_1,Z_2)\\ \mathrm{cov}(Z_1,Z_2) & \sigma_{Z_2}^2\end{pmatrix}$

если $c=\frac{1}{\sqrt3}$, $\hat A=\begin{pmatrix}2 & 1/\sqrt3\\ 1/\sqrt3 & 1\end{pmatrix}$; если $c=-\frac{1}{\sqrt3}$, $\hat A=\begin{pmatrix}2 & -1/\sqrt3\\ -1/\sqrt3 & 1\end{pmatrix}$

№4.

$p(x|\alpha) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \; x \geq 1; \quad L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i|\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{x_i^{\alpha+1}} = \alpha \cdot \frac{1}{x_1^{\alpha+1}} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x_2^{\alpha+1}} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x_3^{\alpha+1}} \cdot \ldots =$

$= \alpha^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\alpha+1}}$

$\prod_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha-1}$, пусть $-\alpha-1=\beta \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta} = x_1^{\beta} \cdot x_2^{\beta} \cdot x_3^{\beta} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta}$

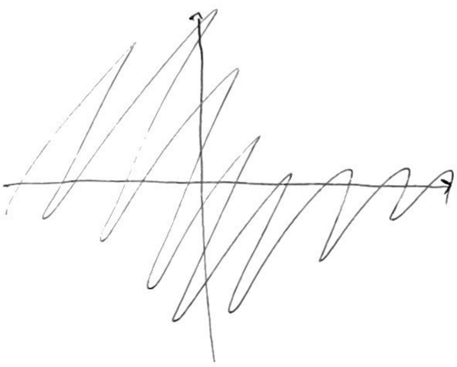
$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\right) = \ln(x_1^{\beta} \cdot x_2^{\beta} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta}) = \beta\ln x_1 + \beta\ln x_2 + \ldots + \beta\ln x_n = \beta \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$

$\ln L(\alpha) = \ln\alpha^n \cdot (-\alpha-1)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}_{S} = \ell; \quad \ell = -\ln\alpha^n \cdot \alpha S - \ln\alpha^n \cdot S =$

$= -n\alpha S\ln\alpha - nS\ln\alpha; \quad \ell'(\alpha) = -nS\ln\alpha - \frac{n\alpha S}{\alpha} - \frac{nS}{\alpha} = 0$

$nS\ln\alpha - nS - \frac{nS}{\alpha} = 0; \quad \ln\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha} = 0; \quad \frac{\alpha\ln\alpha - \alpha - 1}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha\ln\alpha - \alpha - 1 = 0 = f$

трансцендентное уравнение....



№1 $\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_x^2 = 4,\ \sigma_y^2 = 2,\ \mathrm{cov}(x, y) = 1$

$Z = X\cos\varphi + y\sin\varphi,\ V = y\cos\varphi - X\sin\varphi\ ;\ r = 0 \Rightarrow \mathrm{cov}(Z, V) = 0 \Rightarrow E[ZV] = E[Z]E[V]$

т.е. независимые величины.

~~$(Z, V) \to (X, Y):\ f(Z, V) = \det$~~

$$J(x, y) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x\sin\varphi & y\cos\varphi \\ -y\sin\varphi & -x\cos\varphi \end{vmatrix} = x^2\sin\varphi\cos\varphi + y^2\sin\varphi\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi(x^2 + y^2)$$

~~$dxdy$~~ $du\,dv = \sin\varphi\cos\varphi(x^2 + y^2)\,dx\,dy$

Для $x, y$: $\underset{c}{E[XY]} - E[\overset{a}{X}]E[\overset{b}{Y}] = 1 \Rightarrow \begin{cases} c - ab = 1 \\ d - a^2 = 4 \\ e - b^2 = 2 \end{cases}$

$\sigma_x^2 = \underset{d}{E[X^2]} - (E[X])^2 = 4$

$X$ и $y$ зависимые друг от друга величины

$e = E[Y^2]$

Воронкин А., группа 3

№3. $z_1, z_2, z_3$; $p(z) = Az$;

$E[z_1] = \int_0^2 p(z_1)\,dz_1 = \int_0^2 A z_1\,dz_1 = A\,\frac{z_1^2}{2}\Big|_0^2 = A\cdot\frac{4}{2} = 2A$

$E[z_2] = 2A$, $E[z_3] = 2A$; $p_{z_1,z_2}(z_1,z_2) = Az_1\cdot Az_2 = A^2 z_1 z_2$

$E[z_1 z_2] = \int_0^2\int_0^2 A^2 z_1 z_2\,dz_1\,dz_2 = A^2\int_0^2 z_1\,dz_1 \int_0^2 z^2\,dz_2 = A^2\cdot \frac{z_1^2}{2}\Big|_0^2 \cdot \frac{z_2^2}{2}\Big|_0^2 = A^2\cdot 4 = 4A^2$

Нормировка: $\iint_R p_{z_1,z_2}(z_1,z_2)\,dz_1\,dz_2 = 1 \Rightarrow 4A^2 = 1 \Rightarrow A = \pm\frac{1}{2}$  подходит только $A = \frac{1}{2}$

$\iiint p_{z_1,z_2,z_3}(z_1,z_2,z_3) = A^3\int_0^2 z_3\,dz_3\int_0^2 z_2\,dz_2\int_0^2 z_1\,dz_1 = A^3\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 8A^3 = 1 \Rightarrow A^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Пусть $z_1 < z_2 < z_3$, $z_3 = \max \Rightarrow z_3 < z$; $P(z_3 < z) = \prod_{i=1}^{n} P(z_3 < z)$,

~~...~~ $z_i = AX_i$, $X_i \sim Uni(0,1) \Rightarrow P(X_3 < x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_3 < x) = 1 - x$