№ 4 Белозарович А. С.

~~$\mathcal{L}(\theta|\vec{X})$~~

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ – iid

$\mathcal{L}(\theta|\vec{X}) = p(X_1|\theta) \cdot p(X_2|\theta) \dots p(X_n|\theta)$ – в общем случае

$$\mathcal{L}(\alpha|\vec{X}) = \frac{\alpha^n}{\left(\prod_{i=1}^{n} X_n\right)^{\alpha+1}} \quad X \geq 1$$

$$\ln \mathcal{L}(\alpha|\vec{X}) = n \ln \alpha - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{N} \ln X_i$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \alpha^2} = -\frac{n}{\alpha^2} < 0 \Rightarrow \alpha_0 \text{ – это максимум}$$

$$\alpha_0 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

№ 2

$\vec{Z} = (Z_1, Z_2)^T$ ← распределение нормальное

$\langle Z_1^4 \rangle = 12$, $\langle Z_2^6 \rangle = 15$, $\langle Z_1^2 Z_2^4 \rangle = 10$

Среднее нулевое у Z_1, Z_2 ⇒ можем применять теорему Вика для них

$$\langle Z_1^4 \rangle = (2\cdot 2-1)!!\,(\sigma_1^2)^2 = 3\sigma_1^4 = 12 \Rightarrow \sigma_1^2 = 2$$

$$\langle Z_2^6 \rangle = (2\cdot 3-1)!!\,(\sigma_2^2)^3 = 15(\sigma_2^2)^3 = 15 \Rightarrow \sigma_2^2 = 1$$

$$\langle Z_1^2 Z_2^4 \rangle = 10$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

~~$\langle Z_1^2 Z_2^4 \rangle = \sigma_1^2 (\sigma_2^2)^2 \cdot 3 \binom{4}{2} + c^2 \cdot 2! \cdot \binom{4}{2} \cdot \sigma_2^3$~~

$c = \mathbb{E}[Z_1 Z_2]$

тут беру пару $Z_1 Z_1$ и две пары $Z_2 Z_2$

тут беру две пары $Z_1 Z_2$ и одну пару Z_2

В итоге получаем:

$\cancel{10 = 6 + 6C^2}$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

$$\langle z_1^2 z_2^4 \rangle = \sigma_1^2(\sigma_2^2)^2 \cdot 3 + C^2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2! \cdot \sigma_2^2 = 10$$

$$C = \mathbb{E}[z_1 z_2]$$

В итоге получаем

$$10 = 6 + C^2 \cdot 12 \Rightarrow C^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow C = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

В итоге у матрицы ковариации может быть два вида, в зависимости от того величины в фазе или противофазе?

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

№3

$$(z_1, z_2, z_3) \overset{iid}{\sim} p(z) = Az \quad z \in [0, 2]$$

Для начала найдём кумулятивную функцию $\mathbb{P}_Z(Z \le z)$

$$\underbrace{\mathbb{P}_Z(Z \le z)}_{\text{по определению}} = \int_0^z p(z^*)\,dz^* = \int_0^z Az^*\,dz^* = \frac{Az^{*2}}{2}\Big|_0^z = \frac{Az^2}{2} = \frac{z^2}{4}$$

$$\mathbb{P}_Z(Z \le z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z^2/4, & z \in [0, 2] \\ 1, & z > 2 \end{cases}$$

Найдём нормировочную константу:

$$1 = \int_0^2 p(z)\,dz = \int_0^2 Az\,dz = \frac{Az^2}{2}\Big|_0^2 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Рассмотрим случайную величину: $R = \max\{z_1, z_2, z_3\}$

$\cancel{\mathbb{P}_R(R \le y) = \mathbb{P}_R(\max\{z_1, z_2, z_3\})}$

$\mathbb{P}_R(R\le r) = \mathbb{P}(\max\{z_1, z_2, z_3\}\le r) = \mathbb{P}_R(z_1\le r, z_2\le r, z_3\le r) =$

$= \mathbb{P}_z^3(z\le r)$ В этих переходах воспользовались тем, что если максимум числа меньше либо равен чему-то, то все числа меньше либо равны, а (z_1, z_2, z_3) iid

Т.е. $\mathbb{P}_R(R\le r) = \begin{cases} 0, & r<0 \\ \frac{r^6}{64}, & r\in[0,2] \\ 1, & r>2 \end{cases}$

$p(r) = \frac{d}{dr}\mathbb{P}_R(R\le r) = \frac{3}{32}r^5$ на отрезке от 0 до 2

$$\mathbb{E}[R] = \int_0^2 \frac{3}{32}r^5\cdot r\cdot dr = \frac{3r^7}{7\cdot 32}\Big|_0^2 = \frac{3}{7}\cdot 4 = \frac{12}{7}$$

$$\mathbb{E}[R^2] = \int_0^2 \frac{3}{32}r^7 dr = \frac{3}{32\cdot 8}r^8\Big|_0^2 = 3$$

$$\mathbb{D}^2[R] = \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}^2[R] = 3 - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{3\cdot 49 - 144}{49} = \frac{3}{49}$$

$\sigma_R = \frac{\sqrt{3}}{7}$

~~N1~~

~~Насколько помню некоррелированные - это значит, что:~~

$$\cancel{\mathbb{E}[(X_1+X_2)(X_1+X_2)] = \mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_2^2]}$$

$$\cancel{\mathbb{E}[ZV] = \mathbb{E}[X\cos 1 + Y\sin 1}$$

~~N1~~

~~Всё же нет, [illegible]~~

N1

Некоррелированны $\Rightarrow$ матрица ковариации диагональна, т.е.

$$E[ZV] - E[Z]E[V] = 0$$

$$E[ZV] = E[(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)(X\cos\varphi - X\sin\varphi)] =$$

$$= \cancel{E[X^2\cos^2\varphi} \; E[-X^2\cos\varphi\sin\varphi + Y^2\sin\varphi\cos\varphi - XY\sin^2\varphi + XY\cos^2\varphi] =$$

$$=$$

N1

Что-то не сходится с началом задачи:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ — для X и Y матрица

Некоррелированны $\Rightarrow$ матрица ковариации диагональна, т.е.

$$E[ZV] - E[Z]E[V] = 0 \quad (1)$$

$$E[ZV] = E[(X\cos\varphi + Y\sin\varphi)(Y\cos\varphi - X\sin\varphi)] =$$

$$= E[XY\cos^2\varphi - X^2\sin\varphi\cos\varphi + Y^2\sin\varphi\cos\varphi - XY\sin^2\varphi] =$$

$$= \cos 2\varphi \, E[XY] - \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(E[X^2] - E[Y^2]\right)$$

$$E[Z]E[V] = \left(\cos\varphi \, E[X] + \sin\varphi \, E[Y]\right)\left(\cos\varphi \, E[Y] - \sin\varphi \, E[X]\right)$$

$$= -\cos\varphi\sin\varphi \, E^2[X] + \cos\varphi\sin\varphi \, E^2[Y] - \sin^2\varphi \, E[X]E[Y] + \cos^2\varphi \, E[X]E[Y]$$

Осталось аккуратно сгруппировать всё:

$$-\cos\varphi\sin\varphi\left[E[X^2] - E^2[X]\right] + \cos 2\varphi\left(E[XY] - E[X]E[Y]\right) + \cos\varphi\sin\varphi\left[E[Y^2] - E^2[Y]\right] = 0$$ — расписал (1) подробнее

Само время пользоваться матрицей ковариации:

$-\cos\varphi\sin\varphi\cdot 4 + \cos 2\varphi + \cos\varphi\sin\varphi\, 2 = 0$

т.е. $-2\cos\varphi\sin\varphi + \cos 2\varphi = 0 \Leftrightarrow \sin 2\varphi = \cos 2\varphi \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2\varphi = 1$

$2\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$\sigma_Z^2 = Var(Z) = \mathbb{E}\left(\left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)\right) - \mathbb{E}^2\left(X\cos\varphi + Y\sin\varphi\right)$

$= \mathbb{E}[X^2\cos^2\varphi] + \mathbb{E}[Y^2\sin^2\varphi] + 2\mathbb{E}[XY\sin\varphi\cos\varphi] - \mathbb{E}^2[X\cos\varphi] -$

$- \mathbb{E}^2[Y\sin\varphi] - 2\mathbb{E}[X\cos\varphi]\mathbb{E}[Y\sin\varphi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\varphi\left(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]\right) + \sin^2\varphi\left(\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}^2[Y]\right) +$

$+ 2\sin\varphi\cos\varphi\left[\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi = 3 + 2\sin\varphi\cos\varphi =$

$= \left(3 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — т.к. $\operatorname{tg} 2\varphi = 1$

$\sigma_V^2 = Var(V) = \mathbb{E}\left[\left(Y\cos\varphi - X\sin\varphi\right)\left(Y\cos\varphi - X\sin\varphi\right)\right] - \mathbb{E}^2\left(Y\cos\varphi - X\sin\varphi\right)$

$=$